

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Μπορεί σε κάθε ερώτηση να υπάρχουν και περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις.

**Ερώτηση 1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ . Τότε,

- (i) η  $f$  είναι επί.
- (ii)  $f([-8, 8]) \subseteq [0, \frac{15}{8}]$ .
- (iii)  $f^{-1}((-1, 0]) \subseteq (-1, 0]$ .
- (iv)  $f(f^{-1}((-1, 0])) \subseteq f^{-1}((-1, 0])$ .

**Ερώτηση 2.** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (x - 2)^3$ . Τότε

- (i) η  $f$  είναι 1-1 και επί.
- (ii)  $\{2, 3\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$ .
- (iii)  $f([1, 3]) \subseteq [-1, 1]$ .
- (iv) αν ορίσουμε  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = -f(x)$  τότε το σύνολο  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$  είναι άνω φραγμένο.

**Ερώτηση 3.** Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x\}.$$

Τότε

- (i)  $A$  είναι φραγμένο υποσύνολο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .
- (ii) ο αριθμός  $-\sqrt{2}$  είναι infimum του  $A$ .
- (iii) το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο.
- (iv)  $\sqrt{2} \in A$ .
- (v)  $-\sqrt{2} \in A$ .

**Ερώτηση 4.** Δίνονται  $A, B$  δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  ώστε να ισχύει το εξής  $\forall x \in A, \forall y \in B$  ισχύει  $x < y$ . Τότε

- (i)  $\inf B \leq \sup A$ .
- (ii)  $\sup A \leq \inf B$ .
- (iii)  $\inf A \leq \inf B$ .
- (iv) υπάρχει  $\epsilon > 0$ , ώστε  $\sup A < \inf B - \epsilon$ .

**Ερώτηση 5.** Δίνονται τα σύνολα  $A = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$ ,  $K = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k\}$  και  $L = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k - 1\}$ . Τότε

- (i)  $A \cup K \simeq L$ .
- (ii)  $A \cup L \simeq A$ .
- (iii)  $B \simeq \mathbb{R}$ .
- (iv)  $A \cap B \simeq B \cap L$ .

(Όπου για δύο σύνολα  $X, Y$  γράφουμε  $X \simeq Y$ , αν τα σύνολα είναι ισοπληθικά).

**Ερώτηση 6.** Δίνονται τα σύνολα  $A = \{1\}$ ,  $B = \mathcal{P}(A)$ . Τότε

- (i)  $\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ .
- (ii)  $\{\{\{1\}\}\} \subset \mathcal{P}(B) \setminus B$ .
- (iii)  $\mathcal{P}(B) \cap B \neq \emptyset$ .
- (iv)  $B \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$ .

**Ερώτηση 7.** Δίνονται τρία  $A, B, C$  ώστε  $A \times B \subseteq B \times C$ . Τότε

- (i) αν  $B \neq \emptyset$ , τότε  $A \subseteq B$ .
- (ii) αν  $B \neq \emptyset$ , τότε  $B \subseteq C$ .
- (iii) αν  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ , τότε  $C \neq \emptyset$ .
- (iv) αν  $C$  είναι μονοσύνολο και  $A \neq \emptyset$ , τότε το  $B$  είναι μονοσύνολο.

**Ερώτηση 8.** Δίνονται  $A, B, C, D$  τέσσερα μη κενά πεπερασμένα σύνολα για τα οποία ισχύει  $A \cup B = C \cup D$ . Τότε

- (i)  $\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(C) + \text{card}(D)$ .
- (ii)  $\text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C \cap D) = \text{card}(C) + \text{card}(D) + \text{card}(A \cap B)$ .
- (iii)  $\text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = \text{card}(C) \cdot \text{card}(D)$ .
- (iv)  $\text{card}(C) \leq \text{card}(A \cup B)$ .
- (iv)  $\text{card}(A) \leq \text{card}(C \cup D)$ .

**Ερώτηση 9.** Για το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{Z} : -7 < x \leq \sqrt{2}\}$ , ισχύει

- (i)  $\inf A = -7$ .
- (ii) Το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο.
- (iii) Το  $A$  έχει μέγιστο στοιχείο.
- (iv) Το  $A$  δεν έχει supremum.

**Ερώτηση 10.** Δίνονται δύο μη κενά σύνολα  $A$  και  $B$  και μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$ . Στο σύνολο  $A$  ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Τότε (συμβολίζοντας με  $[x]$  την κλάση ισοδυναμίας ενός  $x \in A$  με  $A/\sim$  το σύνολο πηλίκο του  $A$  ως προς την  $\sim$ ) ισχύει:

- (i) αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 τότε η  $\sim$  είναι η διαγώνιος του  $A$ .
- (ii) αν η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 τότε υπάρχει  $x \in A$  ώστε το σύνολο  $[x]$  να περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία.
- (iii) για κάθε  $z \in B$  και κάθε  $x, y \in f^{-1}(\{z\})$  ισχύει  $[x] = [y]$ .
- (iv) αν η  $f$  είναι επί, τότε  $\{f^{-1}(\{z\}) : z \in B\}$  είναι διαμέριση του  $A$ .

**Ερώτηση 11.** Στο  $E = [0, 1]$  ορίζουμε τη σχέση  $\sigma \subseteq E \times E$ , ως εξής:

$$\forall x, y \in E \quad x \sigma y \iff y \leq x + \frac{1}{2}$$

- (i) η  $\sigma$  είναι αυτοπαθής (ανακλαστική).
- (ii) η  $\sigma$  είναι συμμετρική.
- (iii) η  $\sigma$  είναι αντισυμμετρική.
- (iv) η  $\sigma$  είναι μεταβατική.

**Ερώτηση 12.** Δίνεται η λογική πρόταση

$$[\sim (p \Rightarrow q)] \wedge [\sim (r \Rightarrow q)].$$

Αν η παραπάνω λογική πρόταση είναι αληθής, τότε:

- (i) η  $p$  είναι αληθής,  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι αληθής.
- (ii) η  $p$  είναι αληθής,  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι αληθής.
- (iii) η  $p$  είναι αληθής,  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι ψευδής.
- (iv) η  $p$  είναι ψευδής,  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι αληθής.
- (v) η  $p$  είναι ψευδής,  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι αληθής.
- (vi) η  $p$  είναι ψευδής,  $q$  είναι αληθής και η  $r$  είναι ψευδής.
- (vii) η  $p$  είναι αληθής,  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι ψευδής.
- (viii) η  $p$  είναι ψευδής,  $q$  είναι ψευδής και η  $r$  είναι ψευδής.

**Ερώτηση 11.** Δίνεται η εξίσωση  $4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = 0$ . Τότε, το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης είναι η εξής οικογένεια:

(i)  $x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

(ii)  $x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

(iii)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

(iv)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

(iv)  $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

